数理解析研究所講究録
417巻 1981年 100-105

Pure Braid Groups と Milnor $\bar{\mu}$-不変量

広大理 大川哲介

Pure braid group と Milnor $\bar{\mu}$-不変量の関係を調べ，その一応用として，P_n の mod. p-剰余巾零性を証明する.

§1. 諸定義及諸事実

$X_n = \{(x_1, \cdots x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mid \forall i \forall j (x_i = x_j \Rightarrow i = j)\}$

と置き，X_n の座標の置換にともなう n 次対称群 S_n の作用による商空間を $Y_n = X_n/S_n$ と書く．すると

事実 1．$\forall i \geqq 2$ に対して $\pi_i(X_n) = \pi_i(Y_n) = 0$.

が成立する．これより，

系．次の完全列が従う.

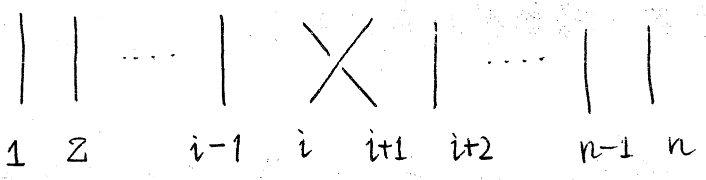
$$1 \longrightarrow \pi_1(X_n) \longrightarrow \pi_1(Y_n) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1$$

定義．$\pi_1(Y_n)$，$\pi_1(X_n)$ を各々，n 次 braid group，n 次 pure braid group と呼び，B_n，P_n で表わす.

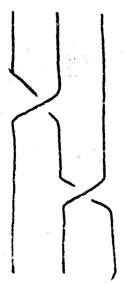
B_n は braid（組紐）の同値類によって定義された群と一致し，以下幾何学的表示も使う．F_n を $x_1, \cdots x_n$ で生成された階数 n の自由群とする.

事実2 (Artin). $\varphi_n : B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_n)$ を,
$\varphi_n(\sigma_i)(x_i) = x_{i+1}$, $\varphi_n(\sigma_i)(x_{i+1}) = x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1}$
$\varphi_n(\sigma_i)(x_j) = x_j$ $(j \neq i, i+1)$ で定義すると, 中への同型となる. 但し σ_i は次の図で示される B_n の生成元.

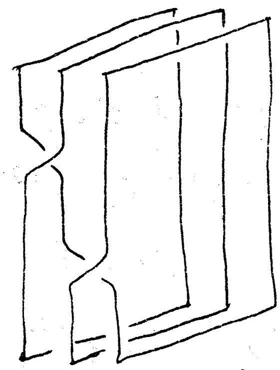
σ_i:



以下 $a^{-1}ba$ を b^a と書く. また $b \in B_n$ に対し, その closed braid $\hat{b}$ (S^3 内の link となる) を次の図で定義する.



b



$\hat{b}$

$b \in P_n$ なら, $\hat{b}$ は n-成分の link となる.

群 G が与えられた時, その普通の (又ハ mod. p の) 降中心列を $\Gamma_* G$ 又ハ $\Gamma_*^{(p)} G$ 表わす. $\{\Gamma_n^{(p)} G\}_{n=1}^{\infty}$ は, 列 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ で ① $G_1 = G$, ② $[G_m, G_n] \subset G_{m+n}$ ③ $x \in G_n \longrightarrow x^p \in G_{np}$ の三条件を満たす最小の (部分群) 列として特徴づけられる.

定義. $P_{n,q} = \{ b \in P_n \mid \bar{\mu}(i_1 \cdots i_k)(\hat{b}) = 0,\ \forall k \leq q,\ \forall i_1 \forall i_2 \cdots \forall i_k \}$, $P_{n,q}^{(p)} = \{ b \in P_n \mid \bar{\mu}(i_1 \cdots i_k)(\hat{b}) \equiv 0 \pmod{p},\ \forall k \leq q,\ \forall i_1 \cdots \forall i_k)$ 但し $\bar{\mu}$ は Milnor $\bar{\mu}$-不変量.

このとき次の諸結果が成立する.

定理1. (i) $P_{n,q}$ は B_n の, 従って P_n の正規部分群

(ii) $[P_{n,q}, P_{n,r}] \subset P_{n,q+r}$

(iii) $\bigcap_q P_{n,q} = \{1\}$

定理2. (i) $P_{n,q}^{(p)}$ は B_n の, 従って P_n の正規部分群

(ii) $[P_{n,q}^{(p)}; P_{n,r}^{(p)}] \subset P_{n,q+r}^{(p)}$

(iii) $b \in P_{n,q}^{(p)} \longrightarrow b^p \in P_{n,pq}$

(iv) $\bigcap_q P_{n,q}^{(p)} = \{1\}$

系. P_n は剰余巾零であり, さらに任意の素数 p に対し mod p-剰余巾零でもある.

§2. 定理の証明.

定理1も全く同様であるから, 定理2のみを証明する. まず次の事実に注意する.

事実3．$b \in P_n$ に対し，$\varphi_n(b)(x_i) = x_i^{f_i(x_1 \cdots x_n)}$ と書いた時（但し f_i に於ける x_i の指数の和は零とする．この様な表示は一意的で，標準表示と呼ぶ），

$$b \in P_{n,g} \Leftrightarrow f_i(x_1, \cdots x_n) \in \Gamma_g F_n \quad (\forall i)$$

$$b \in P_{n,g}^{(p)} \Leftrightarrow f_i(x_1, \cdots x_n) \in \Gamma_g^{(p)} F_n \quad (\forall i)$$

が成立．

mod. p の Magnus expansion

$\Phi_n : F_n \to U(\mathbb{Z}_p[[[v_1, \cdots v_n]]])$（$\mathbb{Z}_p$ 上非可換巾級数環の単数群）を $\Phi(x_i) = 1 + v_i$ で定義するとき，次が成立．

事実4（Zassenhaus）．$x \in F_n$ に対し $x \in \Gamma_g^{(p)} F_n \Leftrightarrow \Phi(x) = 1 +$（$g$ 次以上の項）．

i) の証明．正規性は $\widehat{a^{-1}ba} = \hat{b}$ より明白だから部分群をなすことを云う．$b, c \in P_{n,g}^{(p)}$，$\varphi_n(b) = B$，$\varphi_n(c) = C$ とし，$B(x_i) = x_i^{f_i}$，$C(x_i) = x_i^{g_i}$ を各々標準表示とする．すると $B C(x_i) = B(x_i^{g_i}) = x_i^{f_i C(g_i)}$ となるが，事実3, 4，及び $\Gamma_g^{(p)} G$ が G の特性部分群（任意の自己同型で不変）なることより $bc \in P_{n,g}^{(p)}$ が出る．また $B^{-1}(x_i) = x_i^{h_i}$ を標準表示とすると，$x_i = BB^{-1}(x_i) = x_i^{f_i B(h_i)}$ より $h_i = B^{-1}(f_i^{-1})$ となり $b^{-1} \in P_{n,g}^{(p)}$ が出る．

ii)の証明. $b\in P_{n,g}^{(p)}$, $c\in P_{n,r}^{(p)}$ とし, B, C, f_i, g_i を前と同様とする. $B^{-1}C^{-1}BC(x_i)=x_i^{h_i}$ を標準表示とすると. 以下式変形を行い, $BC(x_i)=CB(x_i^{h_i})$, $B(x_i^{g_i})=C(x_i^{f_i B(h_i)})$,

$x_i^{f_i B(g_i)} = x_i^{g_i C(f_i) CB(h_i)}$,

$\therefore\ f_i B(g_i) = g_i C(f_i) CB(h_i)$,

$$CB(h_i) = C(f_i)^{-1} g_i^{-1} f_i B(g_i)$$
$$= C(f_i)^{-1} f_i (f_i, g_i) g_i^{-1} B(g_i)$$ となる.

ここで $(f_i, g_i)\in\Gamma_{g+r}^{(p)}F_n$ だから, $C(f_i)^{-1}f_i \in\Gamma_{g+r}^{(p)}F_n$ を示せば良い. $\Phi(f_i)=1+$ (g次以上の項) だし, F_n の自己同型 C を Magnus alg. $\mathbb{Z}_p[[[v_1,\cdots,v_n]]]$ の自己同型に持上げて考えれば, 各 v_i に $C(v_i)=v_i+$ ($r+1$次以上の項) を代入する操作だから, $\Phi(f_i)$ と $\Phi(C(f_i))$ は高々 $g+r-1$ 次の項まで一致し, $C(f_i)^{-1}f_i\in\Gamma_{g+r}^{(p)}F_n$ が出る.

iii)の証明. $b\in P_{n,g}^{(p)}$ に対し B, f_i を前と同じとすると

$$B^j(x_i)=x_i^{f_i B(f_i) B^2(f_i)\cdots B^{j-1}(f_i)}$$

が帰納的に云えるから, $B^p(x_i)=x_i^{g_i}$ を標準表示とすると, $g_i=f_i B(f_i)\cdots B^{p-1}(f_i)$ となる. だから

$f_i \in \Gamma_q{}^{(p)} F_n$のときにこの$g_i$が$\Gamma_{pq}{}^{(p)} F_n$に属することを云えば良い．$F_n$の自己同型$B$を$\mathbb{Z}_p[[[v_1, \cdots v_n]]]$の(連続)自己同型に持ち上げたものを，前と同様に，同じくBで表わす．その時$\Phi(B^j(f_i))$
$= B^j(\Phi(f_i)) = 1 + C_1 + \binom{j}{1} C_2 + \cdots + \binom{j}{j} C_{j+1}$
(C_k: qk次以上の項からなる)が帰納的に示される．よって次の補題を示せばよい．

補題．C_iを$\mathbb{Z}_p$上の次数環(可換性は仮定しない)のi次同次元とするとき，$\Pi_{i=0}^{p}(1 + C_1 + \binom{i}{1} C_2 + \cdots + \binom{i}{i} C_{i+1})$の$k$次同次部分$(0 < k < p)$は消える．

二項係数の計算によって示されるが詳細は略する．

(ii)の証明．nに関する帰納法で証明する．$n=1$のとき明白．$n-1$のとき正しいとしてnのとき示す．$b \in \Gamma_q P_{n,q}{}^{(p)}$とすると仮定より$b$の最初の$n-1$本の組紐は真直であるから，$\hat{b}$を考えるときその第$n$本目の紐は$\pi_1(S^3 -$ [$n-1$-成分の自明link])の元を表わすと考えられるが，もしそれが真直でなければ事実4によりmod. pで消えないμが現われるが，これは矛盾．**Q.E.D.**